

Задача 1.1. Расчет стержня

Условие задачи: Стержень, жестко закрепленный одним концом, состоящий из 3-х участков длиной $l_1 \dots l_3$ и площадью $A_1 \dots A_3$, находится под действием собственного веса и силы F , приложенной на координате l_F . Материал стержня – ст. 3.

Требуется: Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений δ .

Дано: $l_1=1,1$ м, $l_2=1,0$ м, $l_3=0,6$ м, $A_1=40$ см², $A_2=20$ см², $A_3=30$ см², $F=70$ кН, $l_f=l_1+l_2$, опора внизу.

Указания: Собственный вес стержня можно представить в виде распределенной нагрузки $q_i=\gamma \cdot A_i$. Ось z , направление силы F и нумерацию участков вести от опоры.

Решение: Вычертим схему стержня в соответствии с исходными данными из табл. 1.1 и указаниями к задаче (см. рис. 1.1). Расчет начнем со свободного конца стержня, т.е. с III-го участка. На силовом участке рассекаем стержень и, отбрасывая часть стержня, содержащую опору, составляем уравнения N , σ и Δl .

Участок III: $0 \leq z_3 \leq l_3$

$$N_3 = q_3 \cdot z_3, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3}, \quad \Delta l_3 = \int_0^{l_3} \frac{N_3}{E \cdot A_3} \cdot dz$$

где $q_3 = A_3 \cdot \gamma$.

Получаем

при $z_3=0$ $N_3=0$, $\sigma_3=0$;

при $z_3=l_3$ $N_3=q_3 \cdot l_3 + F = A_3 \cdot \gamma \cdot l_3 + F =$

$$= 30 \cdot 10^{-4} \cdot 78 \cdot 10^3 \cdot 1,2 + 70 \approx 69,86 \text{ [кН]},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{A_3 \cdot \gamma \cdot l_3}{A_3} = \gamma \cdot l_3 = 69,86 \cdot 10^3 \cdot 0,6 / 20 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 23,3 \cdot 10^6 \text{ [Па]} \approx 23,3 \text{ [МПа]};$$

$$\Delta l_3 = \int_0^{l_3} \frac{N_3}{E \cdot A_3} \cdot dz = \int_0^{l_3} \frac{A_3 \cdot \gamma \cdot z_3}{E \cdot A_3} \cdot dz = \frac{\gamma \cdot l_3^2}{2 \cdot E} =$$

$$\frac{69,86 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{30 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ [м]} \approx 0,00007 \text{ [мм]}$$

Аналогично производим расчет на участках II и I. Далее определяем перемещения сечений стержня:

$$\delta_{0-0} = 0, \quad \delta_{1-1} = \Delta l_1, \quad \delta_{2-2} = \Delta l_1 + \Delta l_2, \quad \delta_{3-3} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

Результаты расчетов сведены в таблицу, а эпюры представлены на рис. 1.1.

Участок	Границы участка	Продольная сила N, кН	Нормальное напряжение σ , Мпа	Перемещение δ , мм
III	начало	0	0	0,2693
	конец	69,86	34,93	0,2694
II	начало	69,86	34,93	0,2694
	конец	69,70	34,89	0,0954
I	начало	69,70	17,43	0,0954
	конец	69,36	17,34	0

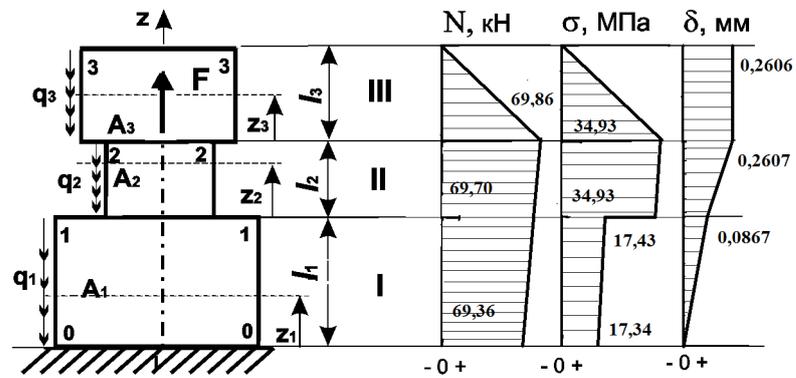


Рис. 1.1.

Задача 1.2. Расчет статически-неопределимого стержня

Условие задачи: Стержень, жестко закрепленный одним концом (А), состоящий из 2-х участков длиной $l_1 \dots l_2$ и площадью $A_1 \dots A_2$, находится под действием приложенной на границе участков силы F и разности температур Δt° . На расстоянии Δ от свободного конца стержня расположена вторая опора (В). Материал участков стержня различен.

Требуется: Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений δ .

Дано: $l_1=0,7$ м, $l_2=1,3$ м, $A_1=40$ см², $A_2=30$ см², $F=40$ кН, опора вверху, сталь-латунь, $\Delta=0,35$ мм.

Δt°
град

=32°C

Указания: Предварительно определите, будут ли деформации стержня от действия силы F и разности температур Δt° превышать значение зазора Δ , т.е. будет ли стержень статически неопределим. Собственным весом стержня пренебречь. Ось z , направление силы F и нумерацию участков вести от опоры.

Решение: Вычертим схему стержня в соответствии с исходными данными из табл. 1.1 и 1.2 и указаниями к задаче (см. рис. 1.2).

Определим деформацию стержня от действия силы F

$$\Delta l_F = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = \frac{F \cdot l_1}{E_{CT} \cdot A_1} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = 0,035 \cdot 10^{-3} [м] = 0,035 [мм]$$

и разности температур Δt°

$$\begin{aligned} \Delta l_T &= \sum \alpha_i \cdot l_i \cdot \Delta t_i = \alpha_{CT} \cdot l_1 \cdot \Delta t + \alpha_{ЛАТ} \cdot l_2 \cdot \Delta t = \\ &= 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 0,7 \cdot 32 + 1,89 \cdot 10^{-5} \cdot 1,3 \cdot 32 = 106,6 \cdot 10^{-5} [м] = 1,066 [мм] \end{aligned}$$

Т.о. деформация стержня от действия силы и разности температур составляет 1,101 мм, что превышает значение зазора $\Delta=0,35$ мм, следовательно, стержень упирается во вторую опору и в результате возникает реакция R_B .

Т.к. стержень становится статически неопределимым, уравнений статики недостаточно для нахождения его опорных реакций. Составим дополнительное уравнение, а именно уравнение деформации стержня.

$$\Delta l_F + \Delta l_T + \Delta l_R = \Delta,$$

$$\begin{aligned} \Delta l_R &= \frac{-R_B \cdot l_1}{E_{CT} \cdot A_1} + \frac{-R_B \cdot l_2}{E_{ЛАТ} \cdot A_2} = -R_B \left(\frac{0,7}{2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} + \frac{1,3}{1 \cdot 10^{11} \cdot 30 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ \text{где} \quad &= -R_B \cdot 5,208 \cdot 10^{-9} [м] \end{aligned}$$

Решая дополнительное уравнение, получим $R_B=144,2$ кН.

Теперь система статически определена, начнем расчет N, σ и Δl аналогично предыдущей задаче.

Участок II:

$$N_2 = -R_B = -144,2 \text{ кН},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-144,2 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-4}} = -4,81 \cdot 10^7 [Па] = -48,1 [МПа]$$

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= \frac{N_2 \cdot l_2}{E_{ЛАТ} \cdot A_2} + \alpha_{ЛАТ} \cdot l_2 \cdot \Delta t^\circ = \frac{-144,2 \cdot 10^3 \cdot 1,3}{1 \cdot 10^{11} \cdot 30 \cdot 10^{-4}} + 1,89 \cdot 10^{-5} \cdot 1,3 \cdot 32 = \\ &= -0,16 \cdot 10^{-3} [м] = -0,16 [мм] \end{aligned}$$

Аналогично производим расчет на I участке.

Далее определяем перемещения сечений стержня:

$$\delta_{0-0} = 0, \quad \delta_{1-1} = \Delta l_1, \quad \delta_{2-2} = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

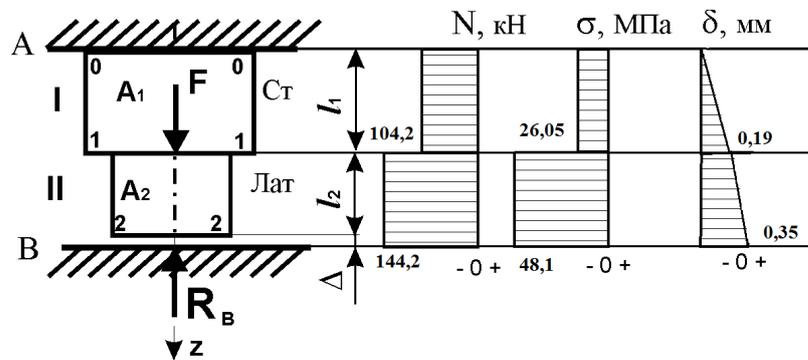


Рис. 1.2

Результаты расчетов сведены в таблицу, а эпюры представлены на рис. 1.2. Обратите внимание, что $\Delta_{2-2} = \Delta$.

Участок	Продольная сила N, кН	Нормальное напряжение σ , МПа	Перемещение δ , мм
I	-104,2	-26,05	0,19
II	-144,2	-48,1	0,35

Задача 1.3. Расчет статически-неопределимой шарнирно-стержневой системы

Условие задачи: Горизонтально расположенный абсолютно жесткий брус, с приложенной к нему силой F , опирается на шарнирно-неподвижную опору O и стержни AB и CD , концы которых шарнирно закреплены.

Требуется: Определить из условия прочности стержней AB и CD допустимую силу F .

Дано: $a=0,9$ м, $b=0,5$ м, $c=0,6$ м, $d=1,5$ м, $f=1,3$ м, $\alpha_1 = 45^\circ$, $A_1=10$ см², $A_2=20$ см², $[\sigma]_1 = 100$ МПа, $[\sigma]_2 = 210$ МПа.

Указания: Модули упругости стержней считайте одинаковыми, т.е. $E_1 = E_2 = E$. При составлении расчетной схемы координаты шарниров откладывайте в соответствии с направлениями осей X и Y : положительные значения – в положительном направлении осей, т.е. вверх и вправо, а отрицательные – наоборот, т.е. вниз и влево. Углы α откладывайте к горизонтали.

Решение: Составим уравнение статики для стержневой системы

$$\sum M_0 = N_2 \cdot c + N_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot a - F \cdot f = 0 \quad (1.3.1)$$

Уравнения статики $\sum F_x = 0$ и $\sum F_y = 0$ не составляем, поскольку они содержат не интересующие нас реакции в опоре O .

Неизвестных усилий в стержневой системе больше, чем уравнений статики, на единицу, следовательно, система один раз статически неопределима. Составим одно дополнительное уравнение совместности деформаций стержней, которое получим из плана перемещений (см. рис. 1.3.2). В результате деформации стержней от действия силы F абсолютно жесткий стержень повернется на некоторый угол, и шарниры A и C займут новое положение A' и C' .

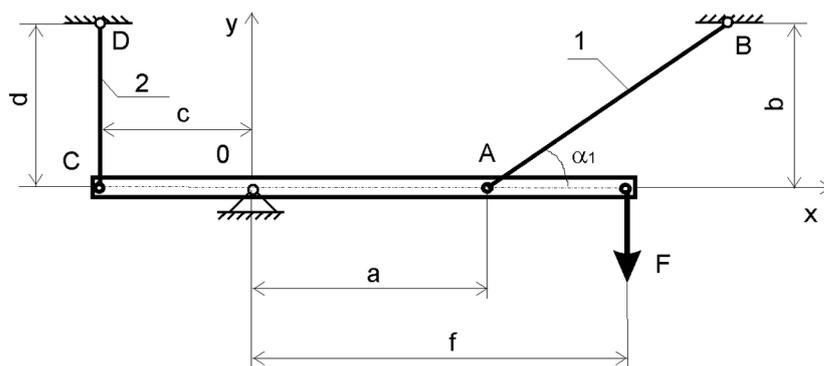


Рис. 1.3.1

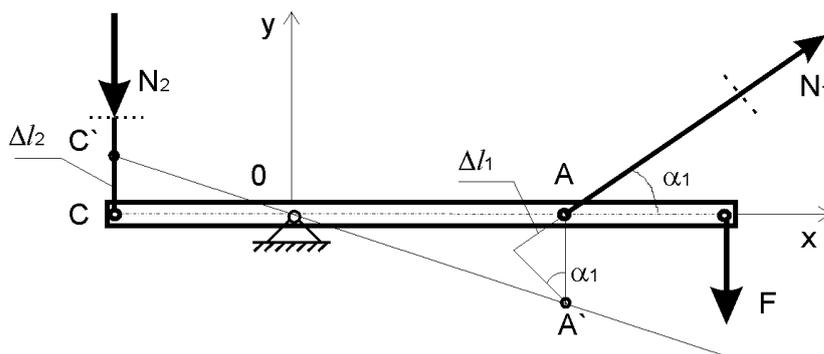


Рис. 1.3.2

Из подобия треугольников $OC\{C'$ и $OA\{A'$ выразим $\frac{CC'}{CO} = \frac{AA'}{AO}$,

где $CC' = \Delta l_2$, $AA' = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha_1}$, $CO = c$, $AO = a$.

Получаем $\frac{\Delta l_2}{c} = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha_1 \cdot a}$,

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = |l_1 = \frac{b}{\sin \alpha_1}| = \frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A_1 \cdot \sin \alpha_1},$$

где

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = |l_2 = d| = \frac{N_2 \cdot d}{E \cdot A_2}.$$

$$\text{Тогда } \frac{N_2 \cdot d}{E \cdot A_2 \cdot c} = \frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A_1 \cdot \sin^2 \alpha_1 \cdot a}.$$

$$\text{Отсюда } N_2 = N_1 \cdot \frac{b \cdot E \cdot A_2 \cdot c}{d \cdot E \cdot A_1 \cdot \sin^2 \alpha_1 \cdot a}.$$

Подставив в полученное уравнение числовые значения, получим

$$N_2 = 0,942 N_1. \quad (1.3.2)$$

Получены уравнения (1.3.1) и (1.3.2) для раскрытия статической неопределенности системы. Составим уравнения расчета стержней 1 и 2 на прочность:

$$\begin{cases} N_1 \leq [\sigma]_1 \cdot A_1 = 100 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 100 \cdot 10^3 [H] = 100 [\kappa H] \\ N_2 \leq [\sigma]_2 \cdot A_2 = 210 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 420 \cdot 10^3 [H] = 420 [\kappa H] \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Определим силу F , при которой будет соблюдено и условие статики по уравнениям (1.3.1, 1.3.2), и условие прочности (1.3.3).

$$\text{Пусть } N_2 = 420 \kappa H,$$

$$\text{тогда из уравнения (1.3.2) } N_1 = \frac{N_2}{0,942} = \frac{420}{0,942} = 445,85 [\kappa H].$$

Но это противоречит условию (1.3.3).

$$\text{Примем } N_1 = 100 \kappa H,$$

$$\text{Тогда } N_2 = N_1 \cdot 0,942 = 100 \cdot 0,942 = 94,2 [\kappa H], \text{ что согласуется с условием (1.3.3).}$$

$$\text{Подставляя полученные значения } N_1 \text{ и } N_2 \text{ в уравнение (1.3.1), найдем}$$

$$F = \frac{N_2 \cdot c + N_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot a}{f} = \frac{94,2 \cdot 0,6 + 100 \cdot 0,707 \cdot 0,9}{1,3} = 92,42 [\kappa H].$$

Задача 2.1. Расчет вала

Условие задачи: К стальному валу, состоящему из 4-х участков длиной $l_1 \dots l_4$, приложено четыре сосредоточенных момента $M_1 \dots M_4$.

Требуется Построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$, подобрать диаметр вала из расчета на прочность, построить эпюру максимальных касательных напряжений τ_{max} , построить эпюру углов закручивания ϕ вала и определить наибольший относительный угол закручивания вала.

Дано: $l_1=1,1$ м, $l_2=0,6$ м, $l_3=0,9$ м, $l_4=0,4$ м, $M_1=-4,5$ кН·м, $M_2=-2,6$ кН·м, $M_3=4,7$ кН·м, $M_4=-2,0$ кН·м.

Указания: Вычертим схему вала в соответствии с табл. 2.1. и рис. 2.1. Знаки моментов в таблице означают: плюс – момент действует против часовой стрелки относительно оси Z, минус – по часовой стрелке (смотри навстречу оси Z). В дальнейшем значения моментов принимать по абсолютной величине. Участки нумеруем от опоры.

Допускаемое касательное напряжение $[\tau]$ для стали примем равным 100 МПа.

Решение: Определим методом сечений значения крутящих моментов на каждом силовом участке, начиная от свободного конца вала. Крутящий момент равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих на вал по одну сторону от сечения.

$$M_{IV} = -M_1 = -2 \text{ [кН·м];}$$

$$M_{III} = -M_1 + M_2 = -2 + 4,7 = 2,7 \text{ [кН·м];}$$

$$M_{II} = -M_1 + M_2 + M_3 = -2 + 4,7 - 2,6 = 0,1 \text{ [кН·м];}$$

$$M_I = -M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = -2 + 4,7 - 2,6 - 4,5 = -4,4 \text{ [кН·м];}$$

Подберем сечение вала из расчета на прочности при кручении по полярному моменту сопротивления сечения:

$$W_p \geq \frac{M_{кр}}{[\tau]}$$

$$\text{Так как для круглого сечения } W_p = \frac{\pi D^3}{16}, \text{ то } D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

Подставим в уравнение $M_{кр}^{max}$ по абсолютному значению из эпюры крутящих моментов и получим

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot [100 \cdot 10^6]}} = 0,047 \text{ [м]} = 47 \text{ [мм]}$$

Принимаем $D=50$ мм.

Определим угол закручивания каждого участка вала по формуле

$$\phi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p},$$

где G – модуль упругости 2-го рода, Па;

$$I_p \text{ - полярный момент инерции сечения (для круглого сечения } I_p = \frac{\pi D^4}{32}), \text{ м}^4.$$

$$G \cdot I_p \text{ - жесткость сечения при кручении, } H \cdot \text{м}^2.$$

$$\text{Для данного вала } G \cdot I_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 49,06 \cdot 10^3 \text{ [H·м}^2\text{]}$$

$$\text{Произведя расчет, получим } \phi_I = -0,099 \text{ рад, } \phi_{II} = 0,002 \text{ рад,}$$

$$\phi_{III} = 0,061 \text{ рад, } \phi_{IV} = -0,045 \text{ рад.}$$

Определим углы закручивания сечений вала, начиная от опоры, где $\phi_{0-0}=0$;

$$\phi_{1-1} = \phi_I = -0,099 \text{ рад; } \phi_{2-2} = \phi_I + \phi_{II} = -0,097 \text{ рад;}$$

$$\phi_{3-3} = \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} = -0,036 \text{ рад;}$$

$$\phi_{4-4} = \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} = -0,081 \text{ рад.}$$

Определим максимальное касательное напряжение на каждом участке по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} = \frac{16 \cdot M_{KP}}{\pi \cdot D^3}$$

Произведя расчет, получим

$\tau_{IV}^{\max} = -81,5$ МПа; $\tau_{III}^{\max} = 110,1$ МПа; $\tau_{II}^{\max} = 4,1$ МПа; $\tau_I^{\max} = -179,4$ МПа; По результатам

расчетов строим эпюры M_{KP} , τ_{\max} и ϕ , представленные на рис. 2.1.

Наибольший относительный угол закручивания определим по формуле

$$\theta_{\max} = \frac{M_{KP}^{\max}}{G \cdot I_P} = \frac{-4,4 \cdot 10^3}{49,06 \cdot 10^3} = -0,089 \text{ [рад/м]}$$

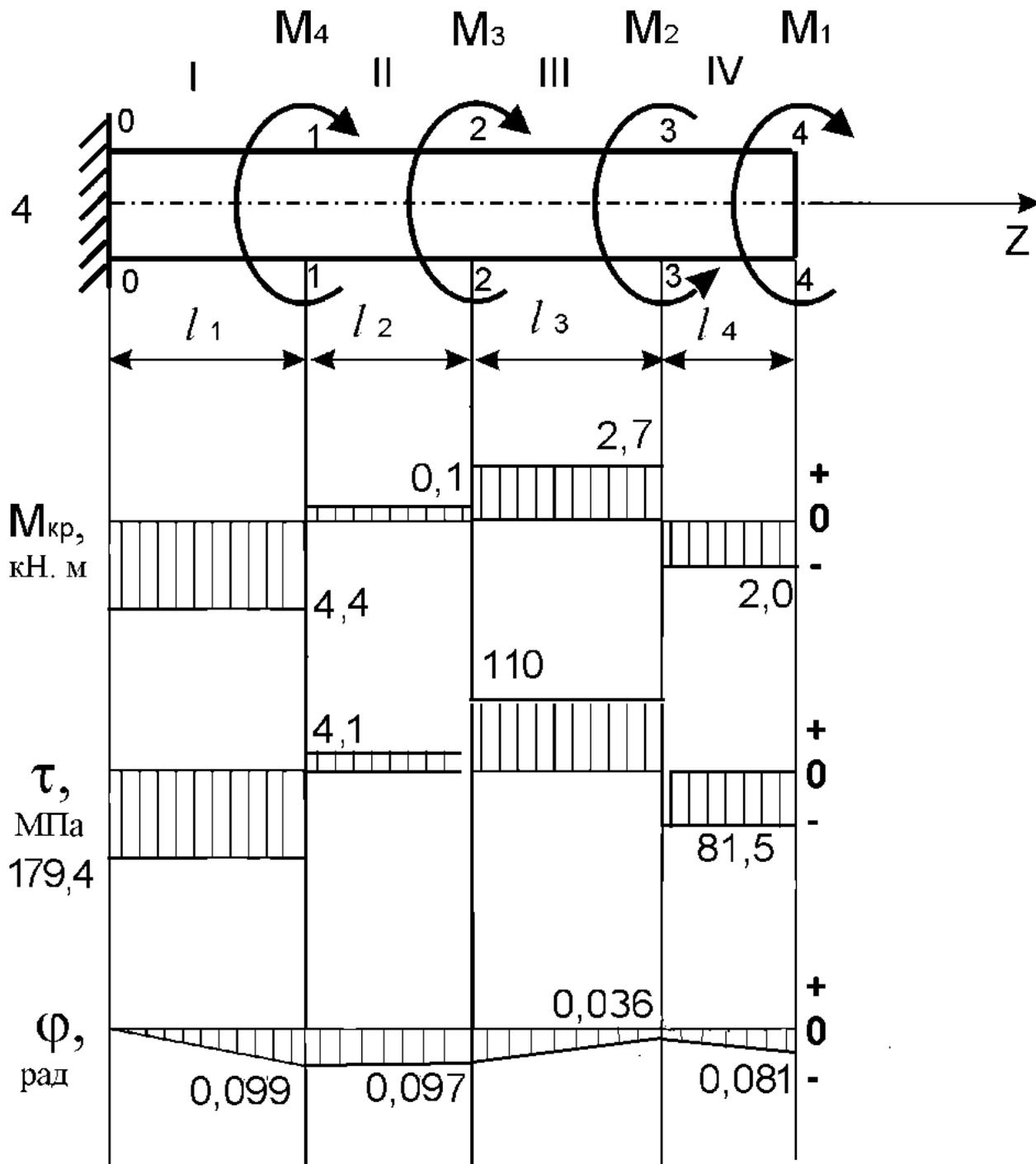


Рис. 2.1.

Задача 2.2. Расчет статически-неопределимого вала

Условие задачи: На статически-неопределимый вал, жестко закрепленный с обоих концов, действует момент M , расположенный на координате Z_M .

Требуется: Определить опорные реакции, подобрать поперечные размеры вала из расчета на прочность, построить эпюры крутящих моментов, касательных напряжений и углов закручивания.

Дано: $l_1=0,8$ м, $l_2=0,9$ м, $l_3=1,1$ м, $z_M=l_1+l_2$, $M=1,0$ кН·м, $d_2=1,5d_1$, $d_3=0,5d_1$.

Указания: Вычертите схему вала в соответствии с исходными данными из табл. 2.2. Начало координат расположите на левом конце вала.

Решение: Данный вал является статически-неопределимым, так как опорных реакций (M_A и M_B) у него больше, чем уравнений статики ($\sum M_Z$) на единицу. Следовательно, для раскрытия статической неопределимости следует составить одно дополнительное уравнение перемещений, а именно, уравнение угла закручивания вала:

$$\phi_B = \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} = \frac{(M - M_B) \cdot l_1}{G \cdot I_P^I} + \frac{(M - M_B) \cdot l_2}{G \cdot I_P^{II}} + \frac{-M_B \cdot l_3}{G \cdot I_P^{III}} = 0$$

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

где

Так как по условию задачи $d_2=1,5d_1$ и $d_3=0,5d_1$, то $I_P^{II}=5,063 I_P^I$, $I_P^{III}=0,063 I_P^I$

$$M_B = \frac{1}{18,85} M = 0,053 \text{ [кН·м]}$$

Тогда, решая уравнение, получим

Статическая неопределимость раскрыта. Крутящие моменты на каждом силовом участке найдем методом сечений:

$$M_{KP}^I = M - M_B = 0,947 \text{ [кН·м]}, \quad M_{KP}^{II} = M - M_B = 0,947 \text{ [кН·м]}$$

$$M_{KP}^{III} = -M_B = -0,053 \text{ [кН·м]}$$

Подбор сечения произведем по уравнению расчета на прочность при кручении: $\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau]$, где

$$W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

Потенциально опасными в нашем случае являются I и III участки.

Сделаем расчеты на прочность для этих участков:

$$\text{на I участке} \quad d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{KP}^I}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,947 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,022 \text{ [м]}$$

$$\text{на III участке} \quad d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{KP}^{III}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,053 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,005 \text{ [м]}$$

Принимаем $d_3=11$ мм, $d_2=33$ мм, $d_1=22$ мм, что не противоречит условиям прочности для всех участков.

Определим максимальные напряжения и углы закручивания на I участке:

$$\tau_{\max}^I = \frac{M_{KP}^I}{W_P^I} = \frac{0,947 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^3} = 453,2 \cdot 10^6 \text{ [Па]} = 453,2 \text{ [МПа]}$$

$$\phi_I = \frac{M_{KP}^I \cdot l_I}{G \cdot I_P^I} = \frac{0,947 \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^4} = 0,412 \text{ [рад]}$$

Аналогично произведем расчет τ_{\max} и ϕ на остальных участках:

$$\tau_{\max}^{II} = 134,3 \text{ МПа}, \quad \phi_{II} = 0,045 \text{ рад}$$

$$\tau_{\max}^{III} = -202,9 \text{ МПа}, \quad \phi_{III} = -0,457 \text{ рад}$$

По полученным значениям строим эпюры, представленные на рис.2.2.

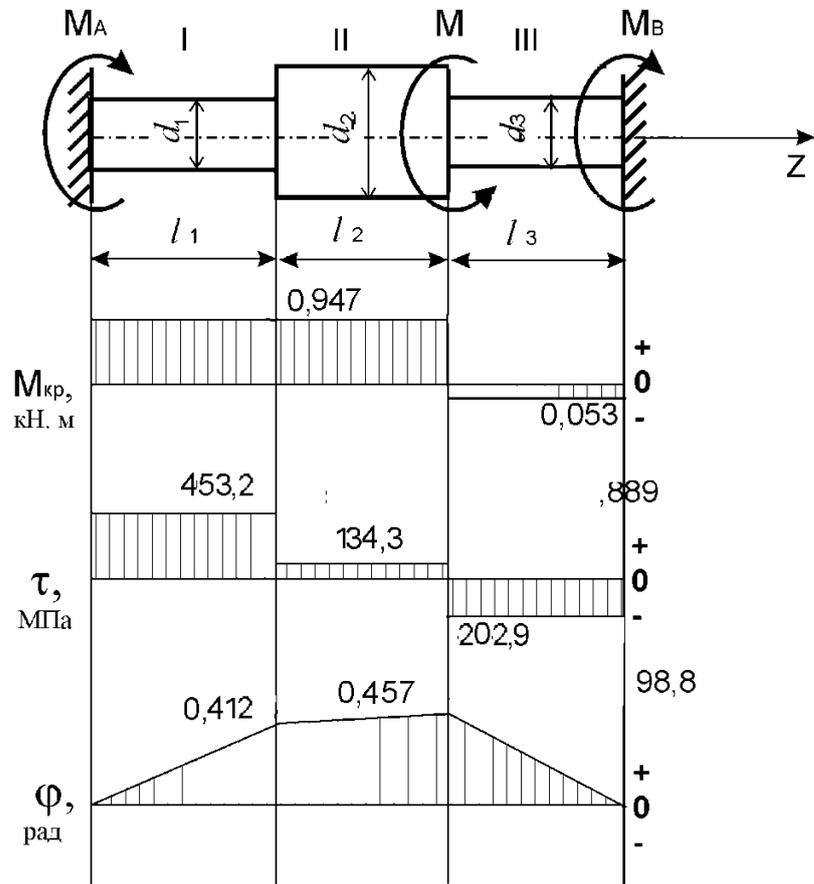


Рис. 2.2

Задача 3.1. Расчет заклепочного соединения

Условие задачи: К пластинам толщиной h , имеющим заклепочное соединение, приложены растягивающие усилия F (см. рис. 3.1).

Требуется: Определить допустимое количество заклепок из условия прочности на срез и смятие.

Дано: $h = 1,6$ м, $d = 4$ м, $F = 9$ кН, $[\tau] = 110$ МПа, $[\sigma]_{см} = 330$ МПа.

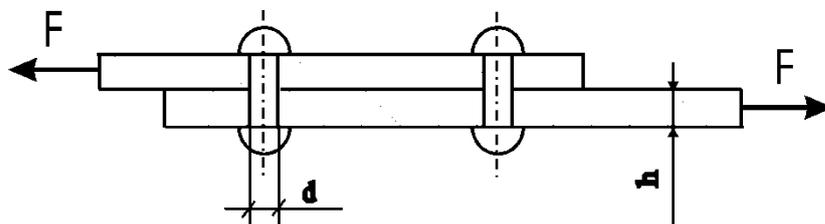


Рис. 3.1.

Указания: Считать, что усилия между заклепками распределены равномерно, отверстия для заклепок продавлены, прочностные характеристики материала пластин выше, чем заклепок.

Решение: Определим количество заклепок из уравнения расчета на прочность при сдвиге (срезе):

$$\tau_{\max} = \frac{F}{A_{ср}} \leq [\tau]$$

где $A_{ср}$ - суммарная площадь среза заклепок.

$$A_{ср} = n \cdot \frac{\pi d^2}{4}, \text{ где } n - \text{число заклепок.}$$

$$n \geq \frac{4 \cdot F}{\pi d^2 \cdot [\tau]} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 110 \cdot 10^6} = 6,51$$

Откуда

Определим количество заклепок из уравнения расчета на прочность при смятии:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma]_{см}$$

где $A_{см}$ - суммарная площадь смятия заклепок.

$$A_{см} = n \cdot h \cdot d$$

$$n \geq \frac{F}{h \cdot d \cdot [\sigma]_{см}} = \frac{9 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 330 \cdot 10^6} = 4,26$$

Откуда

Окончательно принимаем $n=7$ заклепок.

Тема 4. Изгиб

Задача 4.1. Расчет балки

Условие задачи: На горизонтально расположенную балку, закрепленную на двух шарнирных опорах, действуют активные нагрузки M , F и q . Материал стержня – ст. 3.

Требуется: Построить эпюры поперечных сил Q_Y и изгибающих моментов M_X и подобрать сечение балки из расчета на прочность.

Исходные данные к задаче 4.1.

Таблица 4.1

Данные	Нагрузки			Координаты					а, м	Сечение
	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	$F, \text{кН}$	$q, \text{кН}/\text{м}$	z_M	z_F	z_q		z_B		
						нач.	кон.			
0	5	-7	3	5а	а	а	3а	5а	2	швел.
1	-8	12	-8	3а	1,5а	1,5а	3,5а	3а	1,5	двуг.
2	-12	-6	6	4а	2а	3а	5а	4а	2	швел.
3	6	-15	-5	3,5а	а	2а	3а	3,5а	1,5	двуг.
4	-14	13	-9	4,5а	0,5а	0	2а	4,5а	1	швел.
5	9	8	-4	4а	2,5а	4а	5а	4а	1,5	двуг.
6	7	-10	6	5а	0,5а	2а	4а	5а	1	швел.
7	-11	14	5	3,5а	1,5а	2,5а	4,5а	3,5а	2	двуг.
8	-13	9	-10	3а	2а	3а	4а	3а	1	швел.
9	10	-11	7	4,5а	2,5а	а	2а	4,5а	1,5	двуг.
Пр.	16	-10	-10	4а	8а	0	2а	6а	1	двуг.
Вар	II	I	III	III	I	II	II	III	I	III

Указания: Шарнирно-неподвижную опору А располагаем на левом конце балки, его же принимаем за начало координат. На соответствующих координатах расположим шарнирно-подвижную опору В и внешние нагрузки, в соответствии с которыми разобьем балку на силовые участки. Силовым участком будет считать ту часть балки, в пределах которой законы изменения Q_Y и M_X остаются постоянными. Длину каждого участка обозначим через l_i . В нашем примере четыре силовых участка.

Решение: Определим опорные реакции из условия равновесия балки:

$$\sum M_A = -ql_1 \cdot 0,5l_1 + M + R_B \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 0$$

$$R_B = \frac{0,5ql_1^2 - M + F \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4)}{(l_1 + l_2 + l_3)} = 14 \text{ [кН]}$$

откуда

$$\sum M_B = -R_A \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + ql_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) + M - F \cdot l_4 = 0$$

$$R_A = \frac{ql_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) + M - F \cdot l_4}{(l_1 + l_2 + l_3)} = 16 \text{ [кН]}$$

откуда

Произведем проверку правильности опорных реакций:

$$\sum F_Y = 0; \quad R_A - ql_1 + R_B - F = 16 - 10 \cdot 2 + 14 - 10 = 0$$

Опорные реакции найдены правильно.

Составим уравнения внутренних усилий Q_Y и M_X для каждого силового участка балки.

I участок: $0 \leq z_1 \leq l_1$

$$Q_Y = R_A - qz_1$$

$$M_X = R_A \cdot z_1 - qz_1 \cdot \frac{z_1}{2}$$

при

$$z_1 = 0 \quad Q_Y = R_A = 16 \text{ [кН]}; \quad M_X = 0;$$

$$z_1 = l_1 \quad Q_Y = R_A - q \cdot l_1 = 16 - 10 \cdot 2 = -4 \text{ [кН]};$$

$$M_X = R_A \cdot l_1 - ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} = 16 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ [кН}\cdot\text{м]}$$

Т.к. поперечная сила Q_Y на данном участке поменяла знак, то изгибающий момент M_X при $Q_Y=0$ имеет экстремальное значение. Найдем его. $Q_Y = R_A - qz_{ext} = 0$

$$z_{ext} = \frac{R_A}{q} = \frac{16}{10} = 1,6 [м]$$

Отсюда

Подставив полученное значение в уравнение изгибающего момента, получим

$$M_X^{ext} = R_A \cdot z_{ext} - qz_{ext} \cdot \frac{z_{ext}}{2} = 16 \cdot 1,6 - 10 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 12,8 [кН \cdot м]$$

II участок: $0 \leq z_2 \leq l_2$

$$Q_Y = R_A - ql_1 = 16 - 10 \cdot 2 = -4 [кН]$$

$$M_X = R_A \cdot (l_1 + z_2) - ql_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + z_2 \right)$$

при

$$z_2 = 0 \quad M_X = R_A \cdot l_1 - ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} = 16 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 12 [кН \cdot м]$$

$$z_2 = l_2 \quad M_X = R_A \cdot (l_1 + l_2) - ql_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) = 16 \cdot 4 - 10 \cdot 2 \cdot 3 = 4 [кН \cdot м]$$

Аналогично производим расчет на III и IV участках, причем здесь сечение удобнее вести справа налево. По результатам расчетов строим эпюры, представленные на рис. 4.1.

По эпюре M_X определяем опасное сечение балки, где $M_X^{max} = 20 кН \cdot м$ (по абсолютному значению). Размер сечения (в данном случае № двутавра) вычисляем из условия прочности при изгибе по осевому моменту сопротивления сечения:

$$W_X \geq \frac{M_X^{max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,125 \cdot 10^{-3} [м^3] = 125 [см^3]$$

По таблицам сортамента выбираем двутавр № 18, у которого $W_X = 143 см^3$.

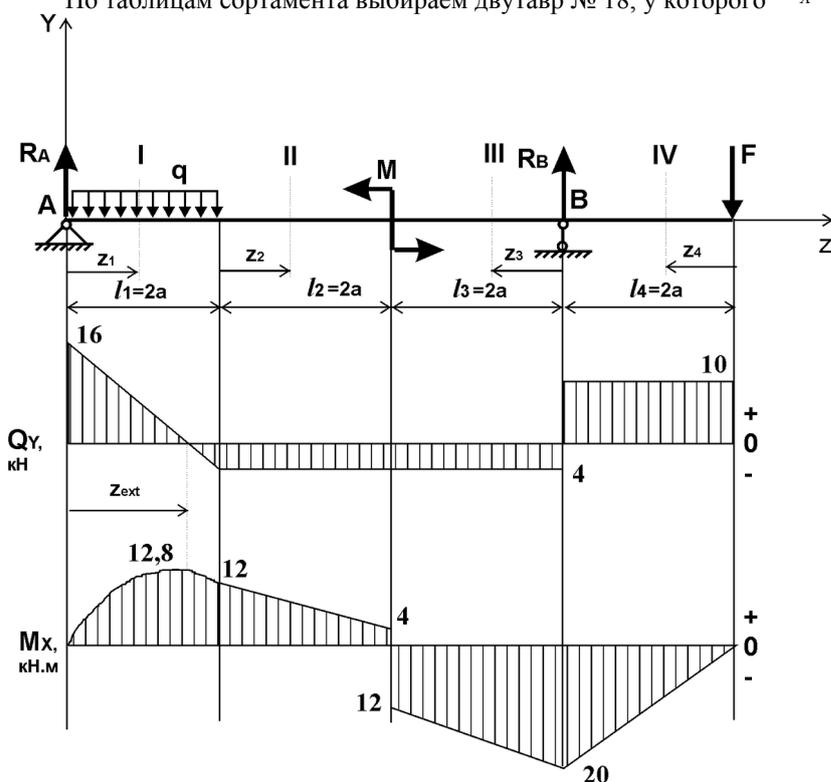


Рис. 4.1.

Задача 4.2. Расчет балки несимметричного сечения

Условие задачи: На горизонтально расположенную балку, жестко закрепленную одним концом, действуют активные нагрузки M , F и q . Сечение стержня несимметрично, материал имеет различные прочностные свойства при растяжении и сжатии.

Требуется: Построить эпюры поперечных сил Q_Y и изгибающих моментов M_X и подобрать сечение балки из расчета на прочность.

Исходные данные к задаче 4.2

Таблица 4.2

Данные	Нагрузки			Координаты				a, м	Сечение (рис.4.2.1)
	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	$F, \text{кН}$	$q, \text{кН}/\text{м}$	z_M	z_F	z_q нач.	z_q кон.		
0	-15	20	10	3a	4a	a	3a	0,5	3
1	20	15	-15	a	2a	0	2a	1,3	2
2	-10	-30	20	1,5a	2,5a	a	2a	1,1	5
3	15	20	-20	a	3,5a	0	a	0,6	1
4	-10	-15	-10	3a	2a	2a	4a	0,8	3
5	15	-25	15	a	4a	0	2a	1,4	4
6	-20	15	10	1,5a	2,5a	a	2a	1,0	2
7	15	30	-20	a	4a	0	a	1,2	1
8	-20	-20	10	3a	3,5a	2a	4a	0,7	5
9	10	25	-15	1,5a	2a	a	3a	0,9	4
Пр.	15	-15	20	3a	4a	0	2a	1,0	6
Вар	II	I	III	III	I	II	II	I	III

Указания: Допускаемые напряжения $[\sigma]_P$ и $[\sigma]_C$ возьмите из табл. 5.2. Жесткую заделку расположите на левом конце балки, там же выберите начало координат. На соответствующих координатах расположите внешние нагрузки, в соответствии с которыми разобьете балку на силовые участки. Длину каждого участка обозначьте через l_i .
В нашем примере три силовых участка.

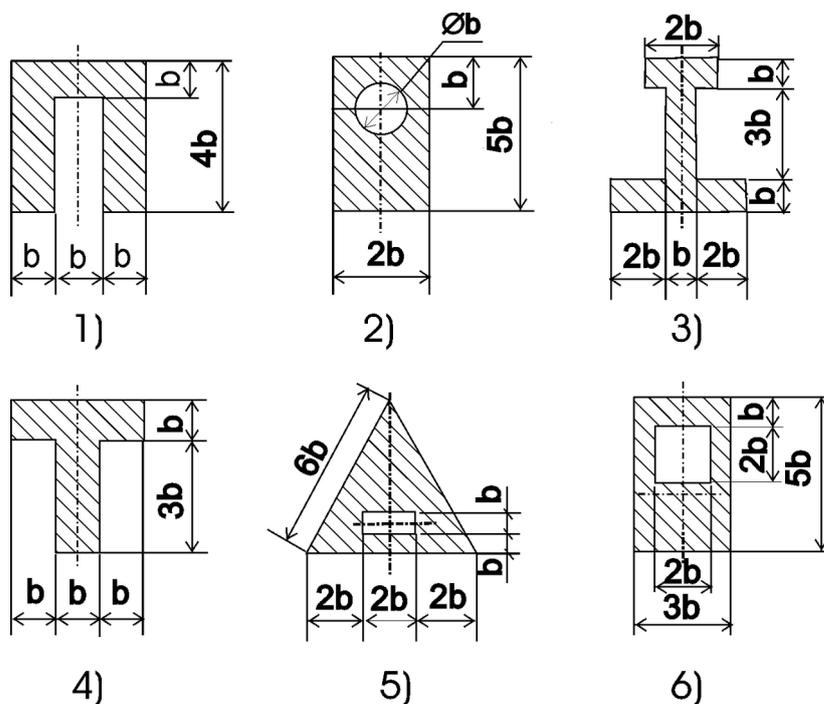


Рис.4.2.1.

Решение: Составим уравнения внутренних усилий Q_Y и M_X для каждого силового участка балки и построим эпюры, изображенные на рис. 4.2.2. Пример построения эпюр дан в предыдущей задаче.

По эпюре M_X определяем опасное сечение балки, где $M_X^{\max} = 38,83 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (по абсолютной величине). Размер сечения вычисляем из условия прочности при изгибе по осевому моменту сопротивления сечения, причем отдельно делаем расчет по растянутым волокнам и отдельно – по сжатым.

$$W_X^P \geq \frac{M_X^{\max}}{[\sigma]^P} = \frac{38,83 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 0,319 \cdot 10^{-3} [\text{м}^3] = 319 [\text{см}^3]$$

$$W_X^C \geq \frac{M_X^{\max}}{[\sigma]^C} = \frac{38,83 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 0,216 \cdot 10^{-3} [\text{м}^3] = 216 [\text{см}^3]$$

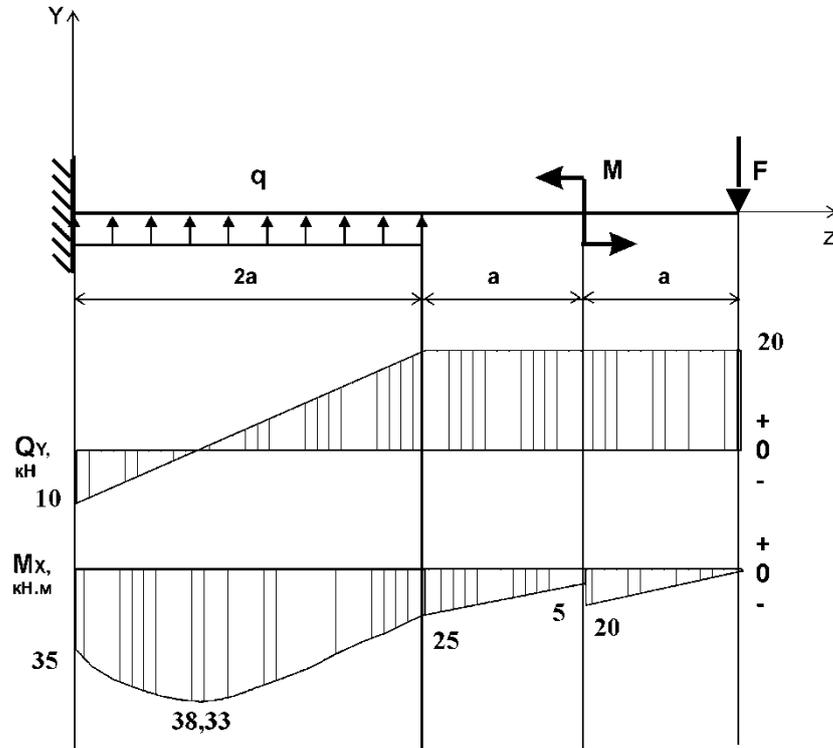


Рис. 4.2.2.

Теперь определим геометрические характеристики сечения W_X^P и W_X^C .

Прежде всего, следует определить положение центра тяжести сечения, т.к. через него проходит

$$y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A}$$

нейтральная линия. Найдем его по формуле

где $S_X = A \cdot y_C$ - статический момент, а A - площадь сечения.

Данное сечение можно представить в виде двух фигур:

1 – прямоугольник $3b \times 5b$; 2 – прямоугольный вырез (т.е. отрицательная фигура) $2b \times 2b$. Координаты y_C

будем откладывать от оси Y (см. рис. 4.2.3.).

$$\text{Тогда } y_C = \frac{3b \cdot 5b \cdot 2,5b - 2b \cdot 2b \cdot 3b}{3b \cdot 5b - 2b \cdot 2b} = 2,32b$$

Проведем через центр тяжести ось X и построим эпюры нормальных напряжений σ . В данном случае сечение расположено нерационально, т.к. $\sigma^P > \sigma^C$, что не согласуется с исходными данными, по которым $[\sigma]^P < [\sigma]^C$. В таком случае сечение переворачиваем (см. рис. 4.2.4).

Определим осевой момент инерции сечения

$$I_X = I_X^I - I_X^{II} = I_{X_1}^I + A_1 \cdot b_1^2 - (I_{X_2}^{II} + A_2 \cdot b_2^2) = \frac{3b \cdot (5b)^3}{12} + 3b \cdot 5b \cdot (0,18b)^2 - \left[\frac{2b \cdot (2b)^3}{12} + 2b \cdot 2b \cdot (0,68b)^2 \right] = 28,55b^4$$

Теперь определим осевые

моменты сопротивления сечения и для растянутых и для сжатых волокон:

$$W_X^P = \frac{I_X}{y_{\max}^P} = \frac{28,55b^4}{2,32b} = 12,31b^3 \quad W_X^C = \frac{I_X}{y_{\max}^C} = \frac{28,55b^4}{2,68b} = 10,65b^3$$

Подберем размеры сечения:

- по растянутым волокнам $W_X^P = 12,31b^3 \geq 319 \text{ см}^3$, откуда

$$b^P \geq \sqrt[3]{\frac{319}{12,31}} = 2,96 \text{ см}$$

- по сжатым волокнам $W_X^C = 10,65b^3 \geq 216 \text{ см}^3$, откуда

$$b^C \geq \sqrt[3]{\frac{216}{10,65}} = 2,73 \text{ см}$$

Выбираем большее значение и принимаем $b = 3 \text{ см} = 30 \text{ мм}$.

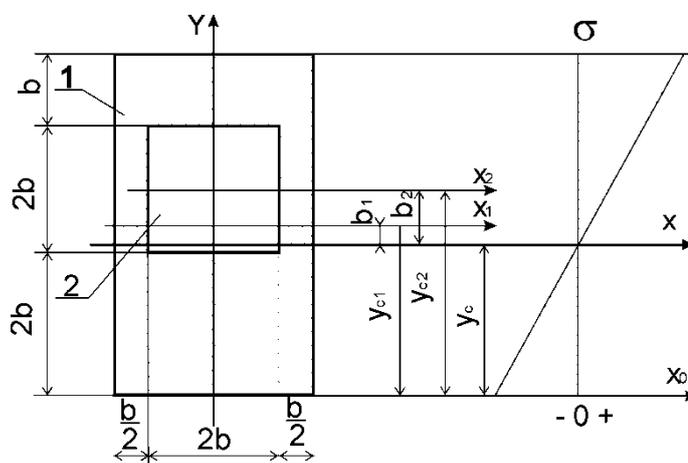


Рис.4.2.3.

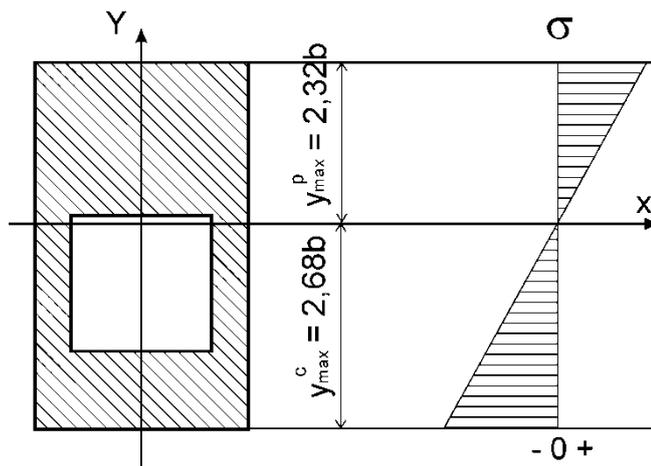


Рис. 4.2.4.

Задача 4.3. Расчет статически-неопределимой балки

Условие задачи: На статически-неопределимую балку, имеющую две опоры: жесткую заделку и шарнирно-подвижную опору, действуют внешние нагрузки: сила F и распределенная нагрузка q .

Требуется: Определить опорные реакции, построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и линейных перемещений.

Исходные данные к задаче 4.3.

Таблица 4.3

Данные	q , кН/м	z_q		F , кН	z_F	z_B	a , м
		нач	кон				
0	10	0	2a	15	a	2a	1
1	-10	3a	4a	5	1,5a	3a	1,5
2	-20	0	2a	10	3,5a	2a	2
3	20	0	3a	20	4a	3a	1,5
4	-15	2a	4a	-5	0,5a	2a	2
5	-20	0	3a	10	2,5a	3a	1
6	15	2a	3a	-10	4a	2a	1,5
7	5	0	3a	15	2,5a	3a	2
8	20	2a	4a	-15	a	2a	1,5
9	-5	3a	4a	-20	1,5a	3a	2
Пример	10	0	3a	15	3,5a	3a	2
Вариант	III	I	I	III	II	I	II

Указания: Вычертим схему балки в соответствии с исходными данными из табл. 4.3. Жесткую заделку расположим на левом конце балки, там же выберем начало координат.

Раскрытие статической неопределимости следует производить методом сил, определение линейных перемещений – методом начальных параметров.

Решение: Данная балка является статически-неопределимой, так как опорных реакций у нее больше, чем уравнений статики на единицу. Следовательно одна опорная реакция "лишняя". За лишнюю связь можно принять, например, реакции M_A , R_A или R_B , но не H_A , так как без нее балка не сможет сохранять равновесие. Примем за лишнюю связь реактивный момент M_A .

Составим эквивалентную схему балки, отбросив лишнюю связь и заменив ее неизвестным усилием X_1 .

Каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой системы имеет вид $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0$, которое для данной системы является уравнением угла поворота балки в начале координат, т.е. в жесткой заделке. Для вычисления его коэффициентов подстроим грузовую M_F (от внешних нагрузок) и единичную \overline{M}_1 (от усилия $X_1=1$) эпюры изгибающих моментов.

Затем найдем коэффициенты канонического уравнения способом Верещагина, перемножая соответствующие эпюры. По способу Верещагина произведение эпюр (например $M_F \times \overline{M}_1$) равно площади грузовой эпюры, умноженной на высоту единичной эпюры, взятой под центром тяжести грузовой эпюры.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_X} \int \overline{M}_1 \times \overline{M}_1 dz = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{2}{EI_X}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_X} \int M_F \times \overline{M}_1 dz = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} qa^2 \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Fa}{2} \cdot 3a \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{75}{EI_X}$$

Подставим полученные значения в каноническое уравнение и найдем X_1 :

$$\frac{2}{EI_X} \cdot X_1 + \frac{75}{EI_X} = 0 \quad , \quad \text{отсюда} \quad X_1 = \frac{-75}{2} = -37,5 [\text{кН} \cdot \text{м}]$$

Статическая неопределимость балки раскрыта.

Отрицательное значение X_1 показывает, что направление этого усилия мы установили неверно и его следует поменять. Таким образом, $M_A = -X_1$. Теперь из уравнений статики найдем опорные реакции:

$$\sum F_Z = -H_A = 0, \quad \Rightarrow \quad H_A = 0;$$

$$\sum M_A = -M_A + R_B \cdot 3a + q \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} + F \cdot 3,5a = 0, \quad \Rightarrow \quad R_B = -41,25 [\text{кН}]$$

$$\sum M_B = -M_A - R_A \cdot 3a - q \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} + F \cdot 0,5a = 0, \Rightarrow R_A = -33,75 \text{ [кН]}$$

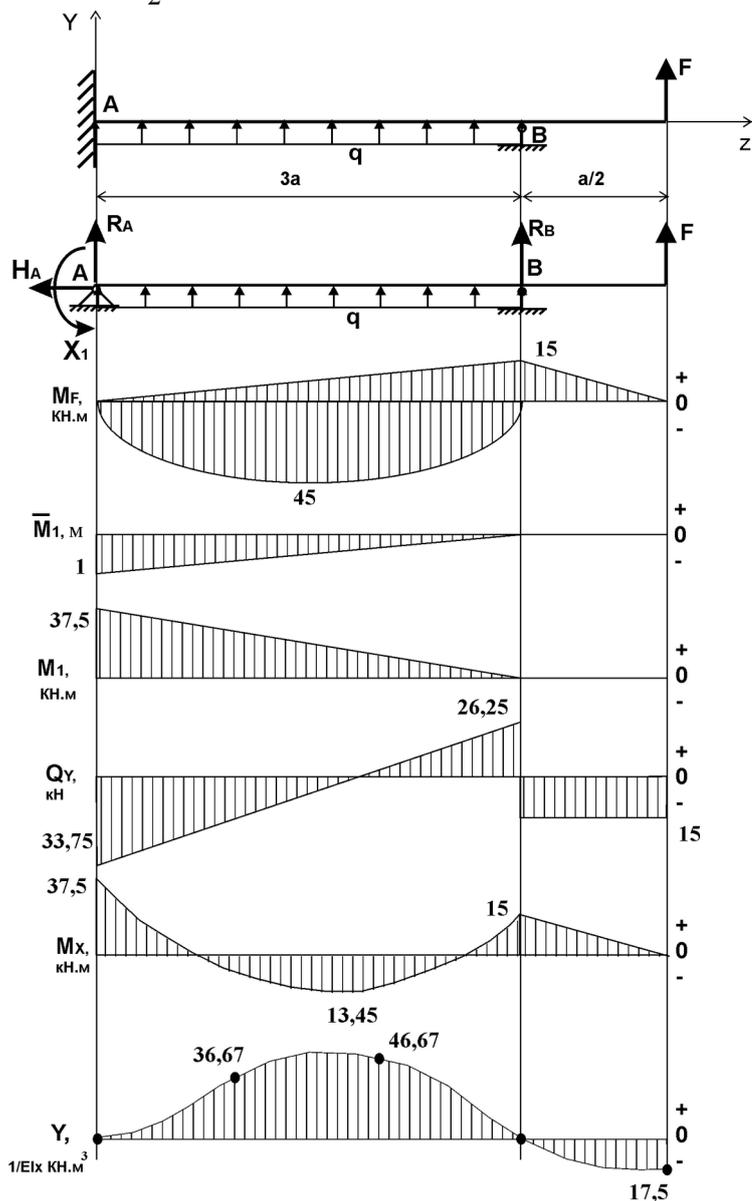


Рис.4.3.

Далее строим эпюры Q_Y и M_X (пример построения эпюр смотри в задаче 4.1.).

Для построения эпюры линейных перемещений Y (прогибов) требуется определить их значения в 4-5 сечениях балки.

В нашем случае известно, что $y_A = 0$, $y_B = 0$. Вычислим прогибы на координатах $z_1 = a$, $z_2 = 2a$, $z_3 = 3,5a$.

Уравнения прогибов в этих сечениях по методу начальных параметров имеют вид:

$$EI_X y_1 = M_A \frac{(a-0)^2}{2} + R_A \frac{(a-0)^3}{6} + q \frac{(a-0)^4}{24} = 36,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$EI_X y_2 = M_A \frac{(2a-0)^2}{2} + R_A \frac{(2a-0)^3}{6} + q \frac{(2a-0)^4}{24} = 46,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$EI_X y_3 = M_A \frac{(3,5a-0)^2}{2} + R_A \frac{(3,5a-0)^3}{6} + R_B \frac{(3,5a-3a)^3}{6} + q \frac{(3,5a-0)^4}{24} - q \frac{(3,5a-3a)^4}{24} = -17,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

строим эпюру Y .

По полученным значениям

Тема 5. Сложное сопротивление

Задача 5.1. Косой изгиб

Условие задачи: На консольную балку прямоугольного сечения действуют внешние нагрузки, расположенные в разных плоскостях.

Требуется: Подобрать размеры поперечного сечения балки из условия прочности и определить линейное перемещение сечения на конце балки.

Исходные данные к задаче 5.1.

Таблица 5.1

Данные	Нагрузки			Координаты, м				a, м	[σ], МПа	Плоскость действия нагрузки
	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	z _M	z _F	z _q на ч	z _q ко н			
0	15	20	17	a	2a	0	a	0,5	160	M-XOZ
1	-18	-15	-15	2a	a	0	2a	0,7	220	F-YOZ
2	12	-22	-20	a	3a	a	2a	0,6	200	q-YOZ
3	20	17	10	3a	2a	0	a	0,9	140	
4	-10	25	-23	a	4a	0	2a	0,8	180	M-XOZ
5	18	-20	17	2a	3a	a	3a	0,7	220	F-YOZ
6	-12	15	-20	2a	a	0	a	0,5	160	q-XOZ
7	-10	-25	10	a	3a	a	3a	0,9	140	M-XOZ
8	20	-22	23	2a	4a	0	2a	0,6	200	F-XOZ
9	-15	17	-15	2a	A	a	2a	0,8	180	q-YOZ
Пр.	-15	15	-10	a	3a	a	2a	1,0	140	
Вар	II	I	III	III	III	II	II	I	III	II

Указания: Модуль Юнга принять равным $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение: Схема балки, построенная по исходным данным примера, представлена на рис. 5.1. Эпюры изгибающих моментов M_X (в силовой плоскости YOZ) и M_Y (в силовой плоскости XOZ) представлены на рис. 5.2. Пример построения эпюр изложен в задаче 4.1.

Определяем опасное сечение балки, где M_X и M_Y имеют максимальные значения:
 $M_X = 15$ кН, $M_Y = 30$ кН. В случае наличия не-

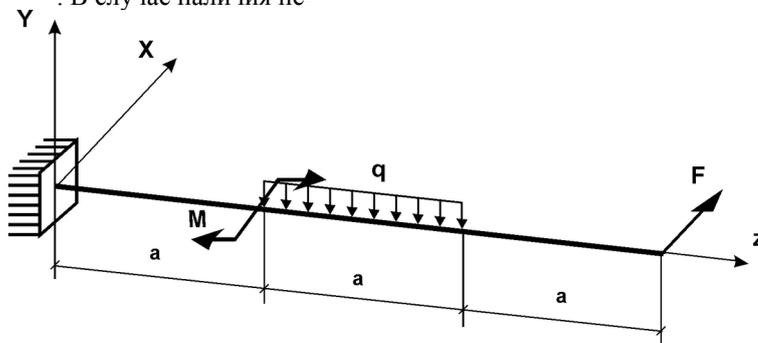


Рис. 5.1.1 Исходная схема балки

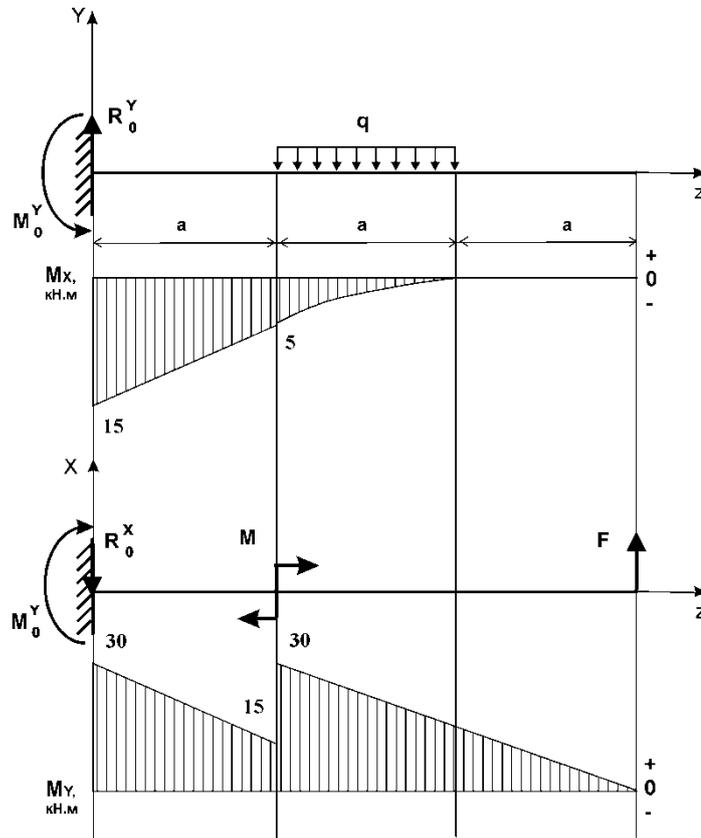


Рис. 5.1.2 Эпюры изгибающих моментов

скольких потенциально опасных сечений необходимо делать расчет на прочность по каждому опасному сечению.

Сечение следует расположить рационально. Так как в нашем случае $M_Y > M_X$, то сечение располагаем так, чтобы соблюдалось условие $W_Y > W_X$. Строим на сечении эпюры напряжений для определения опасной точки сечения (см. пример задачи 4.2).

Максимальное напряжение возникает в т.1, где напряжения максимальны:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{M_X}^{\max} + \sigma_{M_Y}^{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y},$$

$$\text{где } W_X = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3};$$

$$W_Y = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

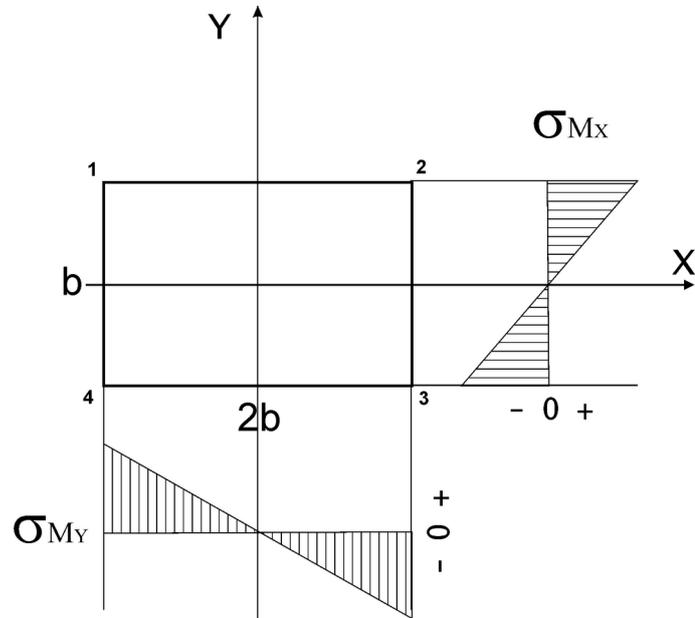


Рис. 5.1.3. Эпюры нормальных напряжений

Определим размер b из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X \cdot 3}{b^3} + \frac{M_Y \cdot 3}{2b^3} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_X + 3M_Y}{2 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{(6 \cdot 15 + 3 \cdot 30) \cdot 10^3}{2 \cdot 140 \cdot 10^6}} = 0,086 [м] = 86 [мм]$$

Принимаем $b=90$ мм.

Определим перемещение конца балки (т. А) по формуле

$$\delta_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2},$$

где X_A и Y_A - перемещения конца балки по осям X и Y , которые определим методом начальных параметров.

Начало координат выбираем в заделке (т. О), где начальные параметры - прогиб и угол поворота сечения равны нулю.

Предварительно определим опорные реакции и жесткость сечения:

$$M_0^X = \frac{3}{2} qa^2 = 15 [кН \cdot м], \quad R_0^Y = qa = 10 [кН]$$

$$M_0^Y = F \cdot 3a - M = 30 [кН \cdot м], \quad R_0^X = F = 15 [кН]$$

$$EI_X = E \cdot \frac{2b \cdot b^3}{12} = 2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{(9 \cdot 10^{-2})^4}{6} \approx 2,19 \cdot 10^6 [H \cdot м^2]$$

$$EI_Y = E \cdot \frac{b \cdot (2b)^3}{12} = 2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{2 \cdot (9 \cdot 10^{-2})^4}{3} \approx 8,75 \cdot 10^6 [H \cdot м^2]$$

Составим уравнения прогибов по методу начальных параметров:

$$EI_X Y_A = -M_0^X \cdot \frac{(3a)^2}{2} + R_0^Y \cdot \frac{(3a)^3}{6} - q \cdot \frac{(2a)^4}{24} + q \cdot \frac{a^4}{24} =$$

$$-28,75 \cdot 10^3 [H \cdot м^3],$$

$$Y_A = \frac{-28,75 \cdot 10^3}{2,19 \cdot 10^6} = -13,1 \cdot 10^{-3} [м] = -13,1 [мм]$$

$$EI_Y X_A = M_0^Y \cdot \frac{(3a)^2}{2} + M \cdot \frac{(2a)^2}{2} - R_0^X \cdot \frac{(3a)^3}{6} = -97,5 \cdot 10^3 [H \cdot м^3]$$

$$X_A = \frac{97,5 \cdot 10^3}{8,75 \cdot 10^6} = 11,1 \cdot 10^{-3} [м] = 11,1 [мм]$$

Окончательно получаем $\delta_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 17,2$ мм

Задача 5.2. Внецентренное растяжение (сжатие)

Условие задачи: На короткий стержень действует сжимающая сила F , приложенная в полюс (точку p).

Требуется: Определим допустимую нагрузку F из условия прочности.

Исходные данные к задаче 5.2

Таблица 5.2

Данные	Сечение (рис.4.2.1)	b , мм	$[\sigma]_p$, МПа	$[\sigma]_c$, МПа
0	2	80	90	150
1	1	50	120	180
2	4	60	80	170
3	2	70	110	140
4	4	90	80	160
5	5	80	100	180
6	3	60	90	150
7	2	50	110	170
8	1	70	120	140
9	5	90	100	160
Пример	6	50	120	140
Вариант	III	II	I	III

Указания: Форма сечения представлена на рис.4.2.1. Полюс p назначьте в точке сечения с максимальными координатами X и Y .

Решение: Определим положение центра тяжести сечения (относительно оси X_0) и осевые моменты инерции сечения (см. рис. 5.2.1). Пример такого расчета представлен в задаче 4.2.

В нашем примере (расчет не приводим) получено:

$$x_c = 0, y_c = 2,32b, I_x = 28,55b^4, I_y = 9,92b^4.$$

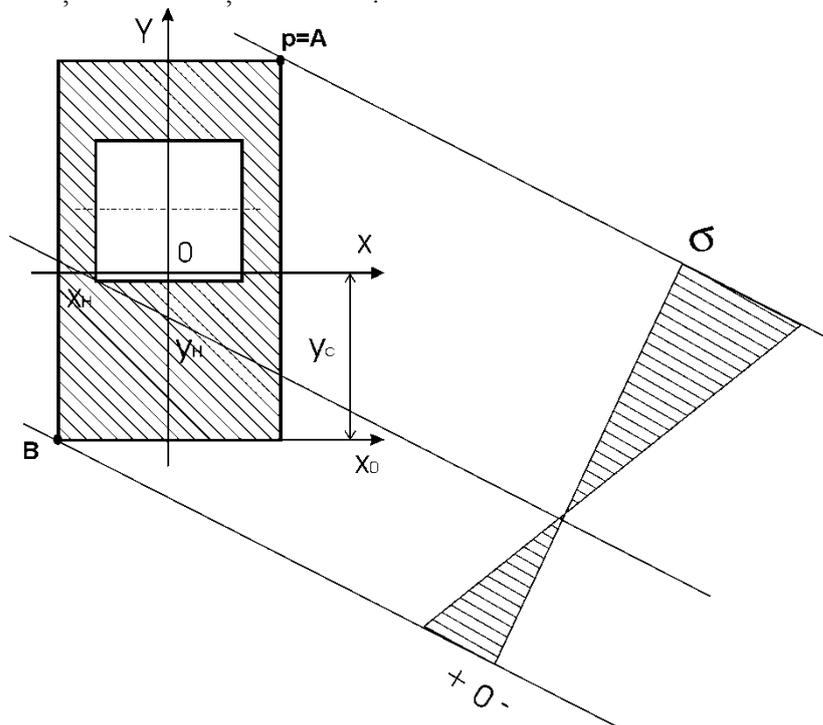


Рис. 5.2.1.

Определим положение нейтральной линии по координатам ее пересечения с осями X и Y :

$$x_n = -\frac{i_y^2}{x_p}; y_n = -\frac{i_x^2}{y_p},$$

где i_x и i_y - радиусы инерции сечения, $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$.

Произведя расчет, получаем

$$x_H = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{I_y}{A \cdot x_p} = -\frac{9,92b^4}{11b^2 \cdot 1,5b} = -0,6b = -30 \text{ мм};$$

$$y_H = -\frac{i_x^2}{y_p} = -\frac{I_x}{A \cdot y_p} = -\frac{28,55b^4}{11b^2 \cdot 2,68b} = -0,97b = -48 \text{ мм};$$

и, отложив эти координаты на оси X и Y , проводим через них нейтральную линию.

Выполним подбор допустимой нагрузки из условия

Максимальные и минимальные напряжения в наиболее удаленных от нейтральной линии точках сечения (это точка A , совпадающая с полюсом p и точка B) определим по формулам:

$$\sigma_{\max} = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{I_x} \cdot y_B + \frac{x_p}{I_y} \cdot x_B \right); \quad \sigma_{\min} = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{I_x} \cdot y_A + \frac{x_p}{I_y} \cdot x_A \right).$$

Произведем расчет:

$$\sigma_{\max} = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{I_x} \cdot y_B + \frac{x_p}{I_y} \cdot x_B \right) =$$

$$i \left| -F \left[\frac{1}{11b^2} + \frac{2,68b}{28,55b^4} \cdot (-2,32b) + \frac{1,5b}{9,92b^4} \cdot (-1,5b) \right] \right| \leq [\sigma]_p$$

откуда $[F]_p \leq 848,3 \text{ кН}$.

$$\sigma_{\min} = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p}{I_x} \cdot y_A + \frac{x_p}{I_y} \cdot x_A \right) =$$

$$i \left| -F \left[\frac{1}{11b^2} + \frac{2,68b}{28,55b^4} \cdot 2,68b + \frac{1,5b}{9,92b^4} \cdot 1,5b \right] \right| \leq [\sigma]_c$$

откуда $[F]_c \leq 614,8 \text{ кН}$.

Окончательно принимаем $[F] = 614,8 \text{ кН}$.

Задача 5.3. Изгиб с кручением

Условие задачи: На валу круглого сечения, вращающемся с угловой частотой ω , расположены два шкива ременной передачи диаметрами D_1 и D_2 , через которые передается мощность $N_{эд}$. Вал закреплен в подшипниковых опорах A и B . Ветви шкива 1 расположены под углом α_1 , а шкива 2 - под углом α_2 к горизонтали.

Требуется: Подобрать диаметра вала по III теории прочности при заданном $[\sigma]$.

Указания: Опору A расположите в начале координат, опору B на координате l_B , шкивы 1 и 2 соответственно на координатах l_1 и l_2 .

Решение: Определим момент $M_{кр}$, действующий на участке вала между шкивами 1 и 2

$$M_{кр} = \frac{N_{эд}}{\omega} = \frac{N_{эд} \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{22 \cdot 10^3 \cdot 30}{3,14 \cdot 750} = 280 \text{ [H} \cdot \text{м]}$$

и построим эпюру крутящих моментов.

Определим усилия t_1 и t_2 в ременной передаче:

$$t_1 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_1} = \frac{2 \cdot 280}{0,4} = 1400 \text{ [H]} = 1,4 \text{ [кН]}$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_2} = \frac{2 \cdot 280}{0,25} = 2240 \text{ [H]} = 2,24 \text{ [кН]}$$

Опорные реакции, необходимые для построения эпюр, определим из уравнений статики:

$$\sum M_X^B = R_A^Y \cdot l_B - (2t_2 + t_1) \cdot (l_2 - l_B) \cdot \sin \alpha_2 = 0 \Rightarrow R_A^Y = 1,45 \text{ [кН]},$$

$$\sum M_Y^B = -R_A^X \cdot l_B + (2t_1 + t_2) \cdot (l_B - l_1) - (2t_2 + t_1) \cdot (l_2 - l_B) \cdot \cos \alpha_2 = 0 \\ \Rightarrow R_A^X = 1,26 \text{ [кН]}$$

и строим эпюры изгибающих моментов M_X и M_Y .

Затем строим эпюру суммарного изгибающего момента $M_{изг}$, являющегося векторной суммой моментов

$$M_X \text{ и } M_Y, \text{ т.е. } M_{изг} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}.$$

Исходные данные к расчету § 2

Данные	l_1 м	D_1 м	α_1 град	l_2 м	D_2 м	α_2 град	l_b м	$N_{\text{вд}}$ кВт	n об/мин	$[\sigma]$ МПа
1	2,1	0,55	15	3,6	0,3	90	3,3	22	1500	240
2	1,5	0,4	15	4,2	0,2	75	2,7	10	1500	220
3	2,4	0,5	30	3,0	0,25	60	3,2	16	1000	180
4	1,7	0,6	0	4,8	0,15	60	2,9	24	750	240
5	1,0	0,4	30	4,0	0,25	75	2,5	12	1250	160
6	2,3	0,45	0	3,8	0,15	60	3,1	20	500	200
7	1,6	0,55	15	4,6	0,3	75	3,4	28	750	220
8	2,0	0,6	30	3,4	0,25	90	2,6	14	1500	180
9	2,2	0,45	30	4,4	0,2	60	2,8	26	1250	200
0	1,8	0,5	15	3,8	0,35	75	3,0	18	1000	160
Пб	2,0	0,4	0	5,0	0,25	60	4,0	22	750	160
Рен	П	И	И	И	И	И	И	И	И	И

Таблица § 2

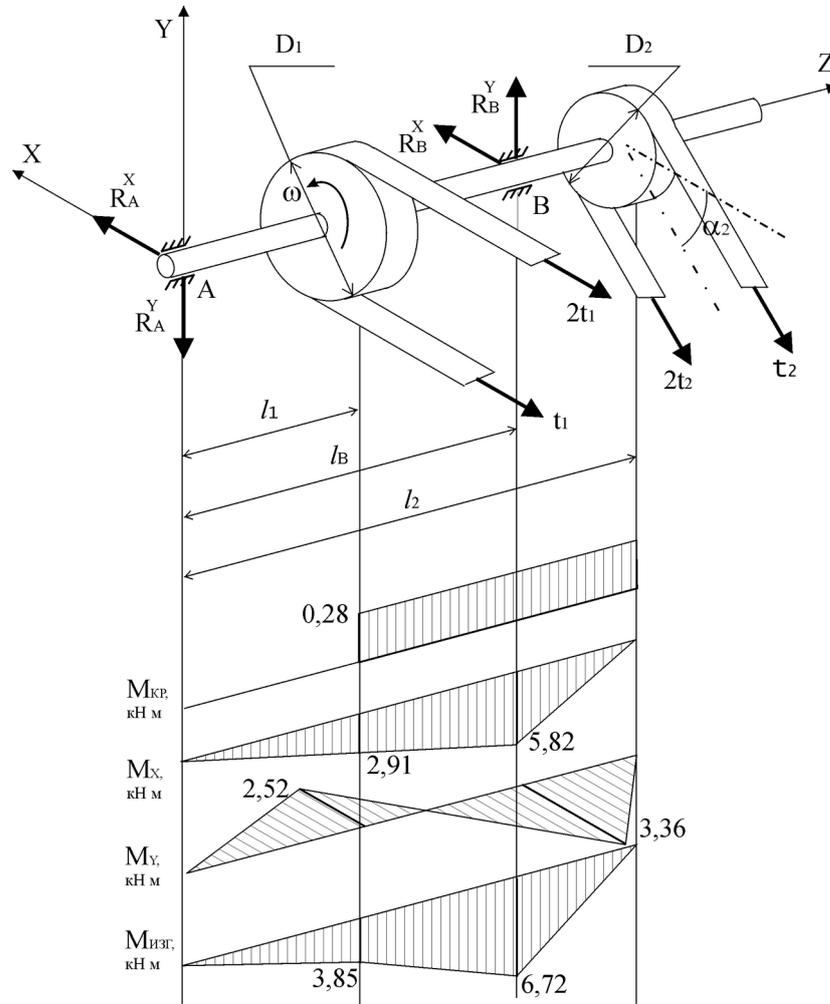


Рис. 5.3.1.

По эпюре $M_{изг}$ определяем опасное сечение вала по максимальному изгибающему моменту $M_{изг} = 6,72 [кН \cdot м]$.

Произведем подбор сечения вала по условию прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{np}^{max}}{W_{oc}} \leq [\sigma]$$

где M_{np}^{max} - приведенный момент, по III теории прочности

$$M_{np}^{max} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2};$$

W_{oc} - осевой момент сопротивления сечения,

$$W_{oc} = \frac{\pi d^3}{32}$$

для круглого сечения

Вычислим диаметр:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{5,82^2 + 3,36^2 + 0,28^2} \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,075 [м] = 75 [мм]$$

Принимаем $d=80$ мм.

Тема 6. Напряженное состояние

Задача 6.1. Плоское напряженное состояние

Условие задачи: На грани кубика действует нормальное напряжение по двум взаимно перпендикулярным направлениям, а также касательные напряжения.

Требуется: Найти главные напряжения в направлении главных площадок, относительные деформации, относительное изменение объема и удельную потенциальную энергию деформации.

Исходные данные к задаче 6.1

Таблица 6.1

Данные	$\sigma_x, \text{МПа}$	$\sigma_y, \text{МПа}$	$\tau_{xy}, \text{МПа}$	Материал
0	70	80	30	бронза
1	-50	-100	-50	латунь
2	80	-120	-60	бронза
3	-60	90	40	сталь
4	100	-110	70	сталь
5	-100	120	-30	латунь
6	50	-90	-70	сталь
7	-70	110	50	бронза
8	60	-80	-40	сталь
9	-80	100	60	латунь
Пример	100	-50	-40	сталь
Вариант	III	II	I	II

Указания: При решении задачи необходимо учесть не только численную величину, но и знаки напряжений. Нормальное напряжение имеет знак плюс при растяжении, а знак минус при сжатии. Касательные напряжения, действующие в одноименных плоскостях, имеют знак плюс, если соответствуют повороту кубика по часовой стрелке, и наоборот.

Решение: Определим главные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} =$$

$$i \frac{100 - 50}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(100 + 50)^2 + 4 \cdot (-40)^2} = 110 \text{ [МПа]} ;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} =$$

$$i \frac{100 - 50}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(100 + 50)^2 + 4 \cdot (-40)^2} = -60 \text{ [МПа]}$$

Определим направления главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 40}{100 + 50} = -0,533$$

Тогда $2\alpha = -0,49$ рад $= -28,07$ град, $\alpha = -14,04$ град.

Покажем на рис. 6.1. главные площадки и главные напряжения σ_{\max} и σ_{\min} , при этом, если α имеет знак минус, то угол откладываем по часовой стрелке от исходной грани куба, на которую действует большее (алгебраически) заданное нормальное напряжение. Тогда получим главную площадку с максимальным напряжением σ_{\max} . Если σ_{\max} или σ_{\min} больше нуля, то будет растяжение, если меньше – сжатие.

Определим относительные деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} (100 + 0,3 \cdot 50) \cdot 10^6 = 5,75 \cdot 10^{-4} ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} (-50 - 0,3 \cdot 100) \cdot 10^6 = -4,00 \cdot 10^{-4} ;$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-0,3}{2 \cdot 10^{11}} (100 - 50) \cdot 10^6 = -7,5 \cdot 10^{-4} ;$$

где μ - коэффициент Пуассона;

E - модуль упругости I-го рода, МПа.

Относительное изменение объема:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (5,75 - 4 - 7,5) \cdot 10^{-4} = -5,75 \cdot 10^{-4}$$

Удельная потенциальная энергия деформации:

$$a = \frac{1}{E} (\sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2 - 2\mu\sigma_{\max}\sigma_{\min}) =$$

$$\frac{1}{2 \cdot 10^{11}} (100^2 + 60^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 100 \cdot 60) \cdot 10^{12} = 86 \cdot 10^3 \text{ [Дж/м}^3\text{]}$$

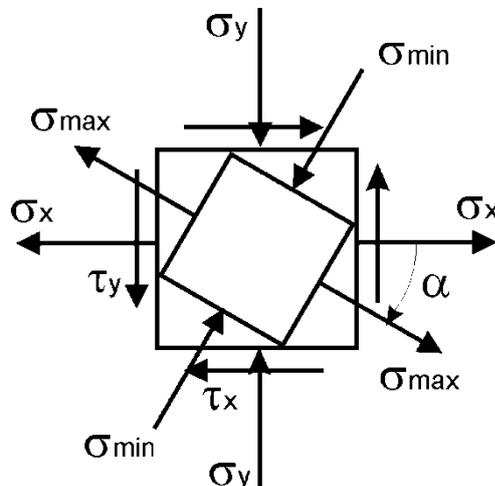


Рис. 6.1.

Некоторые механические характеристики материалов

	Сталь	Бронза	Латунь	Медь	Дерево
Модуль упругости E , ГПа	200	110	100	110	10
Модуль упругости G , ГПа	80	40	35	40	5,5
Допускаемое напряжение, МПа	160	120	140	120	10
Коэффициент Пуассона μ	0,28	0,35	0,36	0,34	-
Удельный вес γ , кН/м ³	78	88	87	89	7
Коэфф-т линейного расширения α , 1/град 10^{-5}	1,25	1,75	1,89	1,67	0,5

Список рекомендуемой литературы

1. Сопротивление материалов/ Под ред. Акад. АН УССР Писаренко Г.С. – 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. Учеб. Для техн. вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1989.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1986.
4. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1986.
5. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988.
6. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов/ Миролубов И.Н., Енгальчев С.А., Сергиевский Н.Д. и др. – М.: Высшая школа, 1985.
7. Сопротивление материалов: Учебное пособие. Спектор С.Г. – Изд-во АлтГТУ – Барнаул. – 1998.

Содержание

Вступление	3 с.
Задача 1.1. Расчет стержня	4 с.
Задача 1.2. Расчет статически-неопределимого стержня	7 с.
Задача 1.3. Расчет статически-неопределимой шарнирно-стержневой системы	10 с.
Задача 2.1. Расчет вала	13 с.
Задача 2.2. Расчет статически-неопределимого вала	17 с.
Задача 3.1. Расчет заклепочного соединения	20 с.
Задача 4.1. Расчет балки	22 с.
Задача 4.2. Расчет балки несимметричного сечения	26 с.
Задача 4.3. Расчет статически-неопределимой балки	31 с.
Задача 5.1. Косой изгиб	35 с.
Задача 5.2. Внецентренное растяжение (сжатие)	39 с.
Задача 5.3. Изгиб с кручением	42 с.
Задача 6.1. Плоское напряженное состояние	46 с.
Приложения	49 с.
Список рекомендуемой литературы	50 с.